Cálculo da Probabilidade do Evento Topo de uma Árvore de Falhas a partir da Utilização de Produtos Disjuntos

Danilo Taverna Martins Pereira de Abreu – danilo.abreu@usp.br
Marcelo Ramos Martins – mrmartin@usp.br

LabRisco – Laboratório de Análise, Avaliação de Gerenciamento de Riscos
Departamento de Engenharia Naval e Oceânica, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo

1. INTRODUÇÃO

A técnica de análise por Árvore de Falhas data da década de 1980, período no qual o uso de métodos quantitativos para a análise de risco passaram a ser percebidos como de grande importância, tendo em vista dois acidentes de grande porte na época: o vazamento radioativo na central nuclear de Three Mile Island (1979) e a explosão do ônibus espacial Challenger (1986) [1]. A referida técnica se trata de um processo no qual se postula um evento indesejado, denominado *evento topo*, e todos os caminhos que podem levar à sua ocorrência são sistematicamente deduzidos. Trata-se de uma técnica poderosa à medida que, além de permitir a determinação dos caminhos mínimos (*Cut Sets mínimos*) que levam à ocorrência do evento topo, também permite o cálculo da probabilidade de ocorrência deste, caso sejam conhecidas as probabilidades de ocorrência de seus eventos mais elementares, denominados *eventos básicos*.

O cálculo da probabilidade de ocorrência exata do evento topo, entretanto, representa um obstáculo do ponto de vista computacional. O número de termos na expressão tende a aumentar exponencialmente com a quantidade de Cut Sets mínimos e, naturalmente, torna impraticável o cálculo na forma convencional para a avaliação de sistemas de grande complexidade. Uma alternativa para contornar o problema diz respeito ao uso de aproximações conservadoras, que superestimam a probabilidade de ocorrência do evento topo em troca de uma expressão simplificada para o seu cálculo. Uma outra possibilidade reside na manipulação da estrutura booleana dos Cut Sets mínimos a fim de obter uma expressão mais simples, mas que ainda assim seja equivalente para o cálculo da probabilidade exata do evento topo. Neste último ramo se encontra a motivação para este trabalho.

2. OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho consiste em apresentar o uso de um algoritmo para a manipulação do conjunto de Cut Sets mínimos de uma Árvore de Falhas a fim de gerar uma expressão equivalente em termos de produtos disjuntos. Por meio dessa expressão, calcula-se a probabilidade de ocorrência exata do evento topo de maneira alternativa à convencional, porém de maneira mais eficiente, com um número reduzido de termos. Além da apresentação do algoritmo, será comparada a eficiência computacional de um código computacional em linguagem de programação C++ que utiliza o algoritmo versus um software comercial que não o faz.

3. REVISÃO E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1. Cálculo Convencional da Probabilidade de Ocorrência Exata do Evento Topo

A expressão que define o evento topo de uma Árvore de Falhas depende dos Cut Sets mínimos os quais, por sua vez, são expressados como produtos de eventos básicos booleanos (ou seja, que possuem apenas dois estados possíveis: de sucesso ou falha). Seja, por exemplo, C_i o i-ésimo Cut Set mínimo que compõe uma Árvore de Falhas e $E_1, E_2, \dots, E_n$ os n eventos que o constituem. Portanto, C_i pode ser expresso como:

$$C_i = E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \tag{1}$$

Onde "$\cdot$" representa o produto booleano entre os eventos.

Ainda, seja $P(E_j)$ a probabilidade do j-ésimo evento. Dado que os eventos são independentes entre si (hipótese essa que sempre é válida para Árvores de Falhas), tem-se que a probabilidade de ocorrência de um Cut Set mínimo é dada por:

$$P(C_i) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \dots \cdot P(E_n) \tag{2}$$

O evento topo, denotado por T, será dado pela união entre todos os Cut Sets mínimos. Ou seja, é uma união entre produtos de eventos booleanos. Seja m o número total de Cut Sets mínimos de uma Árvore de Falhas, então a probabilidade de ocorrência exata pode ser expressa como:

$$P(T) = \sum_{i=1}^{m} P(C_i) - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} P(C_i \cap C_j) + \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} P(C_i \cap C_j \cap C_k) - \dots \tag{3}$$

Os termos à direita da equação representam o maior obstáculo para o cálculo da probabilidade exata de ocorrência do evento topo. Visto que todas as combinações possíveis – de 1 a m elementos – devem ser geradas, o número de termos dentro das somatórias tende a crescer exponencialmente com o número de Cut Sets mínimos. Para ilustrar essa tendência, estão apresentados na Tabela 1 o número de termos que constituem a expressão da probabilidade de ocorrência do evento topo em função do número de Cut Sets mínimos que constituem a correspondente Árvore de Falhas. É notável como para 30 Cut Sets mínimos, quantidade essa que se obtém até mesmo em Árvores de pequeno porte, o número de termos já é superior a 1 bilhão de termos. Com algumas dezenas de Cut Sets mínimos a mais, os números já passam a se tornar intratáveis.

Tabela 1 – Número de termos na expressão de probabilidade do evento topo em função do número de Cut Sets mínimos

Número de Cut Sets mínimos	Número de termos na expressão de probabilidade do evento topo
10	1.023
20	1.048.575
30	1.073.741.823
40	1,0995E+13
50	1,1260E+15

3.2. Teoremas Considerados na Manipulação da Expressão dos Cut Sets Mínimos

Nessa seção serão apresentados dois teoremas de interesse na manipulação da expressão dos Cut Sets mínimos de uma Árvore de Falhas. Apoia-se nesses teoremas o algoritmo que permite a reescrita dos Cut Sets mínimos em função de uma união de produtos disjuntos entre si, a qual simplifica substancialmente o cálculo da probabilidade exata de ocorrência do evento topo.

Sejam:

x_a – a variável booleana que indica a ocorrência do evento a (ou seja, a é verdadeiro);

$\bar{x}_a$ – a variável booleana que indica o complementar de x_a (ou seja, a é falso);

S – produto de variáveis booleanas, somente com variáveis não complementares;

P – produto qualquer de variáveis booleanas (complementares ou não);

ϕ – conjunto vazio

Então, são colocados os seguintes teoremas:

Teorema 1: se alguma variável existe (não complementar) em S e sua complementar existe em P, então S e P são disjuntos entre si (mutuamente exclusivos).

Teorema 2: se S e P não são disjuntos, então seja $X \equiv \{x_a, x_b, \ldots, x_c\}$ o conjunto de variáveis que existem em S e não existem em P. São duas as possibilidades:

a) Se $X \equiv \phi$, então $S \cup P = S$.
b) Se $X \neq \phi$, então $S \cup P = S \cup \bar{x}_a P \cup x_a \bar{x}_b P \cup \ldots \cup x_a x_b \ldots \bar{x}_c P$.

No Teorema 2, a prova do item "a" é trivial. No que diz respeito ao item "b", a validade da expressão proposta pode ser verificada pelas seguintes combinações:

- Se S é falso e P é falso, qualquer termo à esquerda da expressão, bem como qualquer termo à direita também o serão, visto que todos contêm necessariamente S ou P.
- Se S é verdadeiro, então necessariamente a expressão da esquerda é verdadeira, bem como a da direita, pois ambas contêm esse termo individualmente em união com os demais. Nesse caso, é indiferente se P é falso ou verdadeiro.
- A condição na qual S é falso e P é verdadeiro só se dá quando uma ou mais variáveis de X ($x_a, x_b, \ldots, x_c$) são falsas. O termo à esquerda da expressão será verdadeiro. Quanto ao termo da direita, se x_a é falsa, então $\bar{x}_a P$ é verdadeiro. Caso x_a seja verdadeira e x_b seja falsa, então $x_a \bar{x}_b P$ é verdadeiro. Dando continuidade a essa linha de raciocínio, pelo menos um dos termos à direita deve ser verdadeiro, tornando esse lado da equação também verdadeiro.

3.3. Cálculo da Probabilidade de Ocorrência do Evento Topo pela União de Produtos Disjuntos

Pela utilização das expressões apresentadas no item anterior, torna-se possível converter a expressão dos Cut Sets mínimos de uma Árvore de Falhas (que é, no caso mais genérico possível, uma união de produtos não disjuntos) numa união de produtos disjuntos entre si. Dessa maneira, sejam:

$C_1, C_2, \ldots, C_m$ – os m Cut Sets mínimos de uma Árvore de Falhas (não necessariamente disjuntos entre si);

$CD_1, CD_2, \ldots, CD_l$ – os l produtos disjuntos entre si, que constituem a expressão equivalente à original dos Cut Sets mínimos.

Dessa maneira, é válido afirmar que:

$$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m \equiv CD_1 \cup CD_2 \cup \ldots \cup CD_l \quad (4)$$

Calculando a probabilidade de ambos os lados, portanto, tem-se:

$$P(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m) = P(CD_1 \cup CD_2 \cup \ldots \cup CD_l) \quad (5)$$

O termo à esquerda da equação (5) pode ser calculado por meio da expressão apresentada na equação (3), a qual deve considerar todas as possíveis intersecções entre os Cut Sets mínimos e, como discutido anteriormente, recai numa quantidade de termos que tende a ser intratável do ponto de vista computacional. No entanto, o termo à direita pode ser calculado considerando somente a somatória simples entre as probabilidades de cada termo. Isso porque, dado que $CD_1, CD_2, \dots, CD_l$ são disjuntos entre si, a intersecção esses produtos é vazia. Portanto:

$$P(CD_1 \cup CD_2 \cup \dots \cup CD_l) = P(CD_1) + P(CD_2) + \cdots + P(CD_l) \quad (6)$$

O número de termos na equação (6) é demasiadamente menor do que o número apresentado na equação (3). Apesar de l ser maior do que m, esses valores são aproximadamente da mesma ordem de grandeza, como será visto num exemplo desenvolvido adiante. Portanto, o número de termos para o cálculo na expressão não será exponencialmente maior do que o número de Cut Sets mínimos da Árvore de Falhas.

4. DESCRIÇÃO DO TRABALHO REALIZADO

O trabalho realizado consiste na adaptação do algoritmo descrito em [2] para o caso dos Cut Sets mínimos de uma Árvore de Falhas, bem como a comparação, por meio de um exemplo de aplicação, entre a eficiência deste numa rotina computacional em desenvolvimento contra um software comercial especializado que não utiliza a simplificação proposta. Essa seção consiste em apresentar o algoritmo e o exemplo de aplicação que foi resolvido nos dois ambientes citados. A comparação entre as eficiências será apresentada posteriormente na seção “RESULTADOS OBTIDOS”.

4.1. Algoritmo para Expressão da União de Produtos Disjuntos

O algoritmo parte do conjunto de m Cut Sets mínimos já conhecidos e ordenados de 1 a m. Não há uma regra para a ordenação, mas há indicações de que caso os Cut Sets estejam colocados em ordem crescente de número de termos, há melhoria na eficiência do procedimento [3]. O primeiro Cut Set mínimo é mantido inalterado. O segundo Cut Set mínimo é reescrito em termos de produtos que sejam disjuntos com o primeiro. O terceiro é reescrito em termos de produtos que sejam disjuntos com o primeiro Cut Set mínimo e os produtos gerados na reescrita do segundo Cut Set mínimo e assim por diante, até que todos os Cut Sets tenham sido transformados em seus equivalentes disjuntos com os demais.

A notação utilizada será:

$\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ – conjunto dos m Cut Sets mínimos originais;

Δ – conjunto de produtos disjuntos, cuja união entre seus termos é equivalente a $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$;

X – o conjunto de variáveis que existem num produto de variáveis booleanas e não em outro, quando comparados entre si (tal como colocado no Teorema 2 do item 3.2).

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

1) (Inicialização) $\Delta = \{C_1\}$.
2) Para cada, k, $2 \leq k \leq m$, repetir os passos de 3 a 6.
3) Seja $PD_k = \{C_k\}$ (disjunto somente com o conjunto vazio no início e, então, sucessivamente transformado em disjunto com $C_1, C_2, \dots$).
4) Realizar o passo 5 para cada j, $1 \leq j \leq k-1$.
5) Para cada $P_i \in PD_k$, comparar P_i e S_j. Então:
    - Se forem disjuntos, repetir para o próximo P_i;
    - Se $X = \phi$ (conjunto vazio), retirar P_i e repetir para o próximo P_i;
    - Caso contrário, substituir P_i em PD_k pelo conjunto de termos formados de acordo com a expressão no item “b” do Teorema 2.
6) Fazer $\Delta = \Delta \cup PD_k$.
7) Finalizar.

4.2. *Exemplo de Aplicação do Algoritmo*

Para exemplificar a aplicação do algoritmo descrito anteriormente, foi elaborada uma Árvore de Falhas genérica, com 25 eventos básicos identificados ordenadamente de "E1" a "E25". Não será abordada aqui a estrutura da Árvore de Falhas e sim os Cut Sets que dessa resultam, que são de interesse ao escopo do trabalho. Totalizam 57 Cut Sets mínimos, os quais estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Lista de Cut Sets mínimos gerados na Árvore Exemplo

No.	Eventos Básicos	No.	Eventos Básicos
1	E13,E14,E23	31	E04,E07,E08,E15,E18,E19,E20,E24
2	E09,E15,E18,E19,E21,E24	32	E06,E07,E08,E15,E18,E19,E23,E25
3	E09,E15,E18,E19,E22,E24	33	E05,E07,E08,E15,E18,E19,E23,E25
4	E09,E15,E18,E19,E23,E24	34	E06,E07,E08,E15,E18,E19,E23,E24
5	E09,E15,E18,E19,E21,E25	35	E05,E07,E08,E15,E18,E19,E23,E24
6	E09,E15,E18,E19,E22,E25	36	E04,E07,E08,E15,E18,E19,E23,E25
7	E09,E15,E18,E19,E23,E25	37	E06,E07,E08,E15,E18,E19,E22,E25
8	E09,E15,E18,E19,E20,E24	38	E01,E07,E08,E15,E18,E19,E20,E25
9	E09,E15,E18,E19,E20,E25	39	E05,E07,E08,E15,E18,E19,E22,E25
10	E10,E15,E18,E19,E23,E25	40	E04,E07,E08,E15,E18,E19,E23,E24
11	E10,E15,E18,E19,E23,E24	41	E06,E07,E08,E15,E18,E19,E22,E24
12	E10,E15,E18,E19,E22,E24	42	E01,E07,E08,E15,E18,E19,E20,E24
13	E10,E15,E18,E19,E22,E25	43	E05,E07,E08,E15,E18,E19,E22,E24
14	E11,E15,E18,E19,E20,E25	44	E04,E07,E08,E15,E18,E19,E22,E25
15	E10,E15,E18,E19,E21,E25	45	E04,E07,E08,E15,E18,E19,E22,E24
16	E10,E15,E18,E19,E20,E24	46	E06,E07,E08,E15,E18,E19,E21,E25
17	E11,E15,E18,E19,E20,E24	47	E05,E07,E08,E15,E18,E19,E21,E25
18	E10,E15,E18,E19,E21,E24	48	E06,E07,E08,E15,E18,E19,E21,E24
19	E10,E15,E18,E19,E20,E25	49	E05,E07,E08,E15,E18,E19,E21,E24
20	E11,E15,E18,E19,E23,E25	50	E04,E07,E08,E15,E18,E19,E21,E25
21	E11,E15,E18,E19,E23,E24	51	E04,E07,E08,E15,E18,E19,E21,E24
22	E11,E15,E18,E19,E22,E25	52	E01,E07,E08,E15,E18,E19,E23,E25
23	E11,E15,E18,E19,E22,E24	53	E01,E07,E08,E15,E18,E19,E23,E24
24	E11,E15,E18,E19,E21,E25	54	E01,E07,E08,E15,E18,E19,E22,E25
25	E11,E15,E18,E19,E21,E24	55	E01,E07,E08,E15,E18,E19,E22,E24
26	E06,E07,E08,E15,E18,E19,E20,E25	56	E01,E07,E08,E15,E18,E19,E21,E25
27	E05,E07,E08,E15,E18,E19,E20,E25	57	E01,E07,E08,E15,E18,E19,E21,E24
28	E06,E07,E08,E15,E18,E19,E20,E24		
29	E05,E07,E08,E15,E18,E19,E20,E24		
30	E04,E07,E08,E15,E18,E19,E20,E25		

Para o conjunto inicial apresentado de 57 Cut Sets, a aplicação do algoritmo levou a um conjunto de 155 produtos disjuntos. Os primeiros oito termos dos produtos disjuntos estão apresentado na Tabela 3. Nessa tabela, cada coluna se relaciona a um dos eventos básicos ordenados citados anteriormente e cada linha se refere a um dos produtos disjuntos gerados. O número 1 representa que o evento original faz parte do produto, enquanto o número 0 indica a presença de seu complementar. Ainda, o símbolo "-" indica que nem o evento original ou o complementar fazem parte do produto. Pelo fato de os eventos "E01" a "E08" não estarem incluídos nos primeiros Cut Sets, as colunas referentes a esses estão omitidas.

Na Tabela 3, nota-se que, como previsto no algoritmo, o primeiro Cut Set listado na Tabela 2 aparece em sua forma original. O segundo Cut Set é transformado em disjunto com o primeiro termo pela consideração de três termos novos:

- O termo n.º 2, que é disjunto com o termo n.º 1 devido ao evento complementar de E13;
- O termo n.º 3, que é disjunto com o termo n.º 1 devido ao complementar de E14 e disjunto com o termo n.º 2 devido ao evento E13 (não complementar);
- O termo n.º 4, que é disjunto com o termo n.º 1 devido ao complementar de E23, disjunto com o termo n.º 2 devido ao evento E13 e disjunto ao termo n.º 3 devido ao evento E14.

Tabela 3 – Trechos dos oito primeiros produtos disjuntos

Termo	Eventos Básicos																	
	...	E09	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E23	E24	E25
1	...	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-
2	...	1	-	-	-	0	-	1	-	-	1	1	-	1	-	-	1	-
3	...	1	-	-	-	1	0	1	-	-	1	1	-	1	-	-	1	-
4	...	1	-	-	-	1	1	1	-	-	1	1	-	1	-	0	1	-
5	...	1	-	-	-	0	-	1	-	-	1	1	-	0	1	-	1	-
6	...	1	-	-	-	1	0	1	-	-	1	1	-	0	1	-	1	-
7	...	1	-	-	-	1	1	1	-	-	1	1	-	0	1	0	1	-
8	...	1	-	-	-	0	-	1	-	-	1	1	-	0	0	1	1	-

A partir do termo n.º 5, o terceiro Cut Set listado na Tabela 2 é feito disjunto em relação aos termos anteriores e assim por diante, até completar a lista inteira de Cut Sets mínimos. Então, para calcular a probabilidade de ocorrência do evento topo, basta aplicar a expressão da Equação (6), a qual possuirá 155 termos. A nível de comparação, caso a Equação (3) fosse utilizada, o número de termos seria da ordem de 10^{17}.

5. RESULTADOS OBTIDOS

A Árvore de Falhas que dá origem aos Cut Sets mínimos listados no exemplo do item anterior foi modelada dentro do software SAPHIRE 8, do Idaho National Laboratory, o qual é especializado na construção e resolução de Árvores de Falhas e Árvores de Eventos. Para tanto, foram atribuídas probabilidades de ocorrência para os eventos básicos listadas na Tabela 4.

Com o SAPHIRE 8, o tempo decorrido para determinação da probabilidade de ocorrência exata do evento topo, que é de 3,6001E-08, foi de 16,812 segundos. Em contrapartida, com um código computacional em linguagem de programação C++ também capaz de modelar Árvores de Falhas, no qual o algoritmo descrito neste trabalho foi implementado, o tempo de processamento foi de 4,24 segundos. Portanto, para o exemplo apresentado, houve uma melhoria superior a 3 vezes no tempo de processamento.

A fim de não se prender a um único exemplo, também foram geradas Árvores de Falhas com quantidades variadas de Cut Sets mínimos e as mesmas probabilidades da Tabela 4. Para cada uma das Árvores, foi comparado o tempo de processamento para cálculo exato da probabilidade de ocorrência do evento topo no SAPHIRE 8 e no código computacional em C++, os quais estão apresentados na Tabela 5. Em todos os casos, o código computacional se mostrou mais eficiente devido ao emprego do algoritmo.

Uma observação especial fica por conta dos casos com 49 e 57 Cut Sets mínimos, onde o primeiro caso, a despeito do número menor de Cut Sets mínimos, foi processado em tempo superior. Isso ocorre porque o tempo de processamento do algoritmo não está somente ligado ao número de Cut Sets mínimos. A maneira como os Cut Sets mínimos estão relacionados entre si e o número de eventos em comum entre estes também influencia na eficiência do procedimento.

Tabela 4 – Probabilidades de ocorrência para os eventos básicos

Evento Básico	Probabilidade	Evento Básico	Probabilidade	Evento Básico	Probabilidade
E01	0,001	E11	0,001	E21	0,001
E02	0,002	E12	0,002	E22	0,002
E03	0,003	E13	0,003	E23	0,003
E04	0,004	E14	0,004	E24	0,004
E05	0,005	E15	0,005	E25	0,005
E06	0,006	E16	0,006		
E07	0,007	E17	0,007		
E08	0,008	E18	0,008		
E09	0,009	E19	0,009		
E10	0,010	E20	0,010		

Tabela 5 – Comparação dos tempos de processamento para números variados de Cut Set mínimos

Número de Cut Sets mínimos	Tempo de processamento (em segundos)	
	SAPHIRE 8	Código em C++
13	0,26	0,11
49	5,03	4,27
57	16,81	4,24
73	55,21	8,80
118	698,00	22,65

6. COMENTÁRIOS FINAIS

O procedimento descrito neste trabalho para a determinação de uma expressão equivalente à dos Cut Sets mínimos de uma Árvore de Falhas em termos de uma união de produtos disjuntos para o cálculo da probabilidade de ocorrência do evento topo se mostrou bastante satisfatório no que diz respeito a melhorias de eficiência computacional. Inicialmente, foi questionado se o tempo decorrido para o processamento do algoritmo compensaria o tempo economizado pela eliminação da necessidade de utilização da Equação (3). Essa resposta é imediata, dados os números da Tabela 5, que cobre uma grande variedade de casos de Cut Sets mínimos.

Quanto maior o número de Cut Sets mínimos, maior se mostra a discrepância entre o tempo de processamento requerido ao se aplicar o algoritmo ou não. Destaca-se que, por mais que para uma única Árvore de Falhas o tempo de processamento superior a alguns minutos não represente um valor crítico ou inaceitável, para rotinas computacionais onde a repetição do cálculo dentro de processos iterativos é requerida, a necessidade de um procedimento eficiente é mandatória.

Por último, destaca-se que o tempo de processamento para o código em C++ apresentado considera o processamento do algoritmo, o qual somente precisa ser realizado uma única vez. Caso seja necessário repetir o cálculo, não é preciso mais a reprodução do algoritmo uma vez que a expressão de produtos disjuntos foi obtida.

7. REFERÊNCIAS

[1] STAMATELATOS, M. & VESELY, W. “Fault Tree Handbook with Aerospace Applications”, V 1.1, NASA Office of Safety and Mission Assurance (2002).

[2] ABRAHAM, J.A. “An Improved Algorithm for Network Reliability”, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-28, No. 1, p. 58, 1979.

[3] AGGARWAL, K.K. “Comments on – On the Analysis of Fault Trees”, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-25, No.2, p. 126, 1976.